Sistemi - soluzione
Sistemi III Appello , 13/09/2019
Tempo a disposizione: 2h

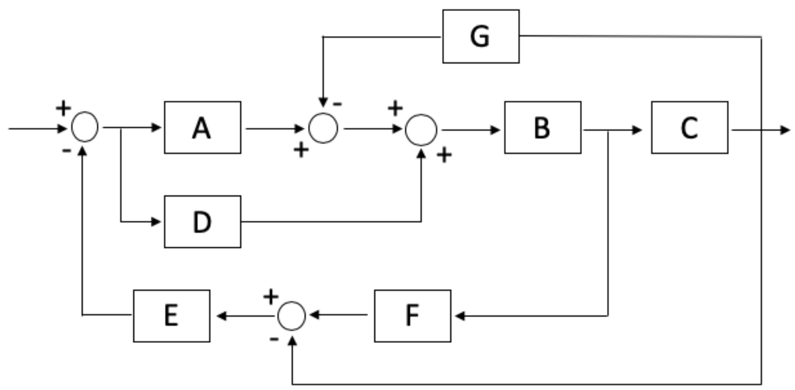
Esercizio 1

Dato il sistema LTI causale a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alla differenze :

$$3v(k) - 4v(k-1) + v(k-2) = u(k-1) + u(k-2)$$
$$v(-1) = \frac{1}{2} \qquad v(-2) = \frac{3}{2} \qquad u(k) = k(3)^k \delta_{-1}(k)$$

I) Calcolare la risposta libera nel tempo (esclusivamente nel tempo).
II) Si discuta la stabilitá asintotica e la stabilitá BIBO.
III) Calcolare la riposta forzata del sistema utilizzando l'anti-trasformata Zeta.

Esercizio 2
Si consideri lo schema a blocchi in figura. Semplificare lo schema trovando la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita.



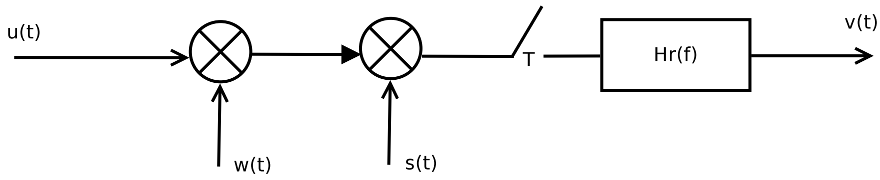
Esercizio 3
Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{20s^2 + 8s + 20}{s^2(1 + 10s)}$$

I) Dopo aver riportato $G(s)$ in forma di Bode, disegnare il diagramma di Bode di ciascuna componente elementare e il risultante diagramma globale.
II) Considerare la coppia di zeri complessi coniugati. Quanto vale il coeffciente di smorzamen- to in questo caso? Cosa si può dire sull'andamento del grafico reale rispetto a quello asintotico, in corrispondenza della pulsazione di risonanza associata?

Esercizio 4

Dato il seguente schema a blocchi trovare l'uscita $\mathbf{v(t)}$ del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze :



Dove $u(t) = cos(6\pi t)$, $w(t) = 4cos(12\pi t)$, $s(t) = \frac{1}{2}$
I) Con un periodo di campionamento con $T = \frac{1}{10}s$. Costruire **se possibile** un filtro di ricostruzione $H_r(f)$ per ricostruire il segnale $u(t)$.
II) Con un periodo di campionamento con $T = \frac{1}{20}s$. Costruire **se possibile** un filtro di ricostruzione $H_r(f)$ per rictruire il segnale $u(t)$.

Per entrambi i punti motivare la risposta.

Esercizio 5
Calcolare la trasformata zeta della seguente successione e trovate la regione di convergenza:

$$v(k) = \begin{cases} 1, 0 \le k \le N-1 \\ 0, k \ge N \\ 0, k < 0 \end{cases}$$

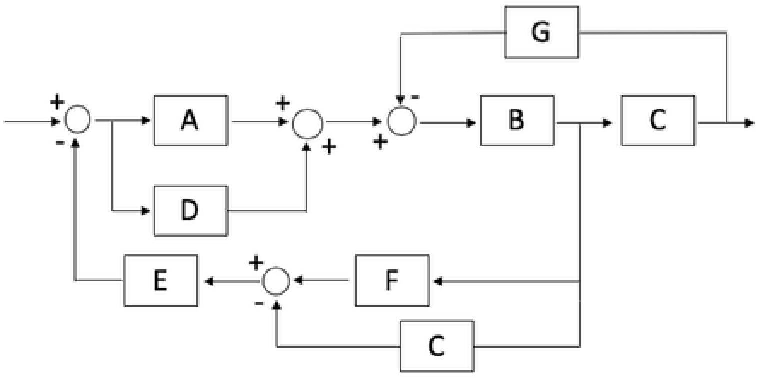
Soluzione

Esercizio 1 7pt

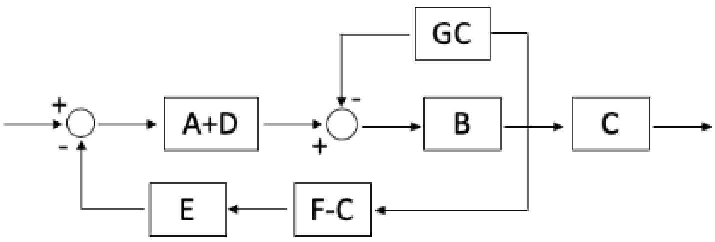
(vedi correzioni precedenti)

Esercizio 2 5pt

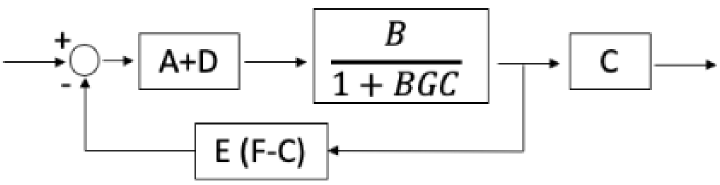
Schemi a blocchi



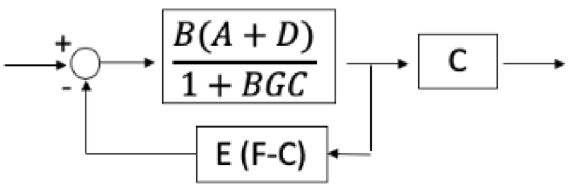
Inversione nodi sommatori
Sposto diramazione a monte di C



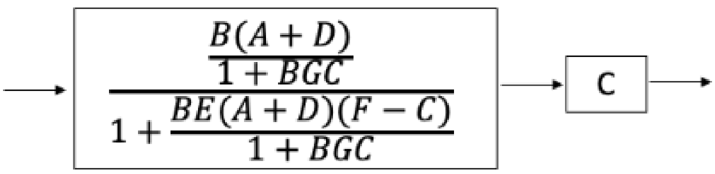
Sposto diramazione a monte di C
Parallelo A-D e F-C



Serie ramo inferiore
Retroazione BGC



Serie

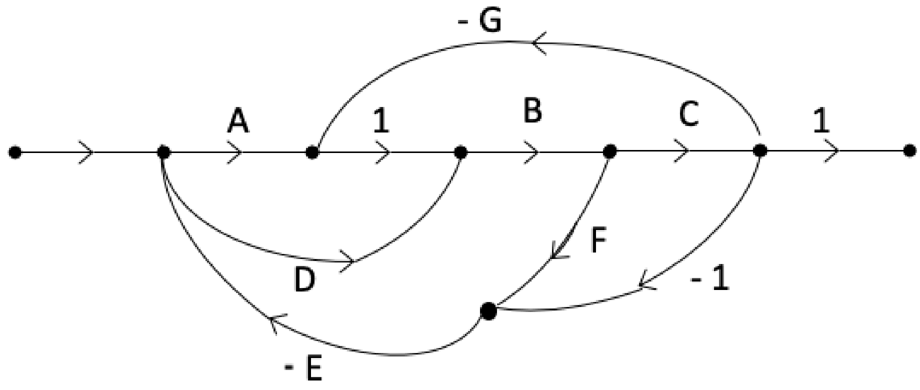


Retroazione

Funzione di trasferimento totale:
$T = \frac{B(A+D)}{1+BGC+BE(A+D)(F-C)}C$

$T = \frac{BC(A+D)}{1+BGC+BEAF-BEAC+BEDF-BCED}$

Diagrammi di flusso



Cammini aperti:
$P_1 = ABC$
$P_2 = DBC$

Anelli singoli:
$P_{11} = -BCG$
$P_{21} = -ABFE$
$P_{31} = ABCE$
$P_{41} = BCED$
$P_{51} = -BFED$

Coppie di anelli che non si toccano: nessuna

Delta:
$\Delta = 1-(-BCG-ABFE+ABCE+BCED-BFED) = 1+BCG+ABFE-ABCE-BCED+BFED$
$\Delta_1 = 1+\cancel{BCG}+\cancel{ABFE}-\cancel{ABCE}-\cancel{BCED}+\cancel{BFED}$
$\Delta_2 = 1+\cancel{BCG}+\cancel{ABFE}-\cancel{ABCE}-\cancel{BCED}+\cancel{BFED}$

Trasmittanza totale:
$T = \frac{ABC+DBC}{1+BCG+ABFE-ABCE-BCED+BFED} = \frac{BC(A+D)}{1+BCG+ABFE-ABCE-BCED+BFED}$

Punteggio: 5

Esercizio 3 7pt
I) Riporto la funzione di trasferimento in forma di Bode:

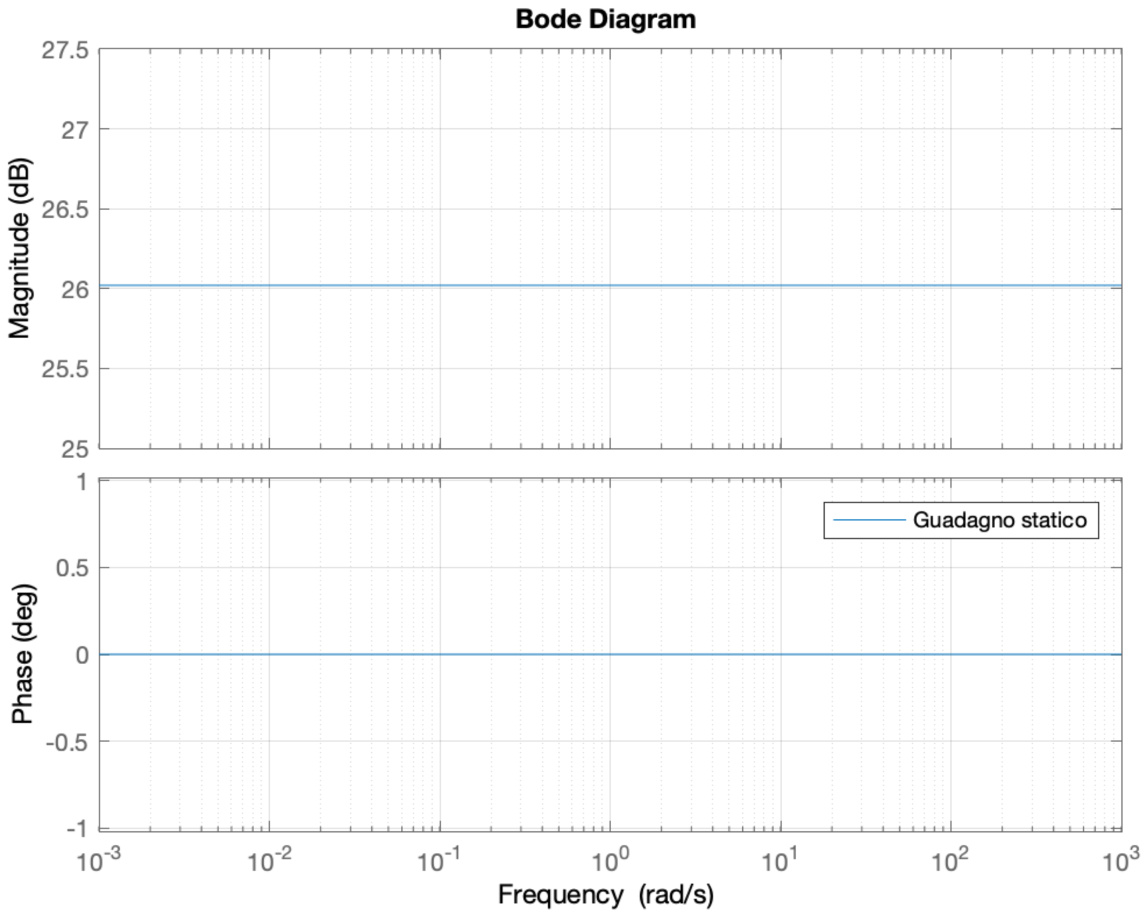
$$\frac{20s^2+8s+20}{s^2(1+10s)}$$

$$G(s) = \frac{20(s^2 + 0.4s + 1)}{s^2(1 + 10s)}$$

Punteggio: 1pt

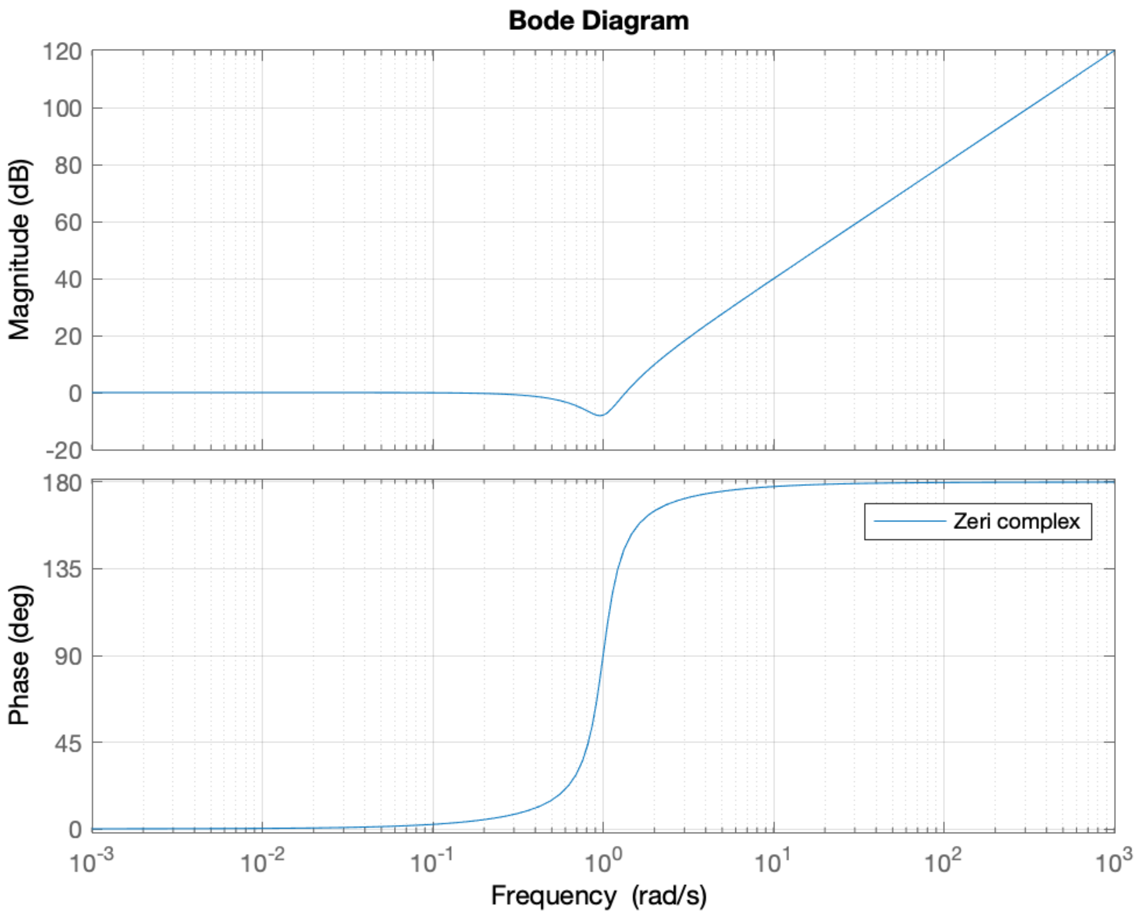
1) 20

$|G|_{dB} = 20log_{10}(20) = 26.02$
$\angle G = 0$
Punteggio: 1pt



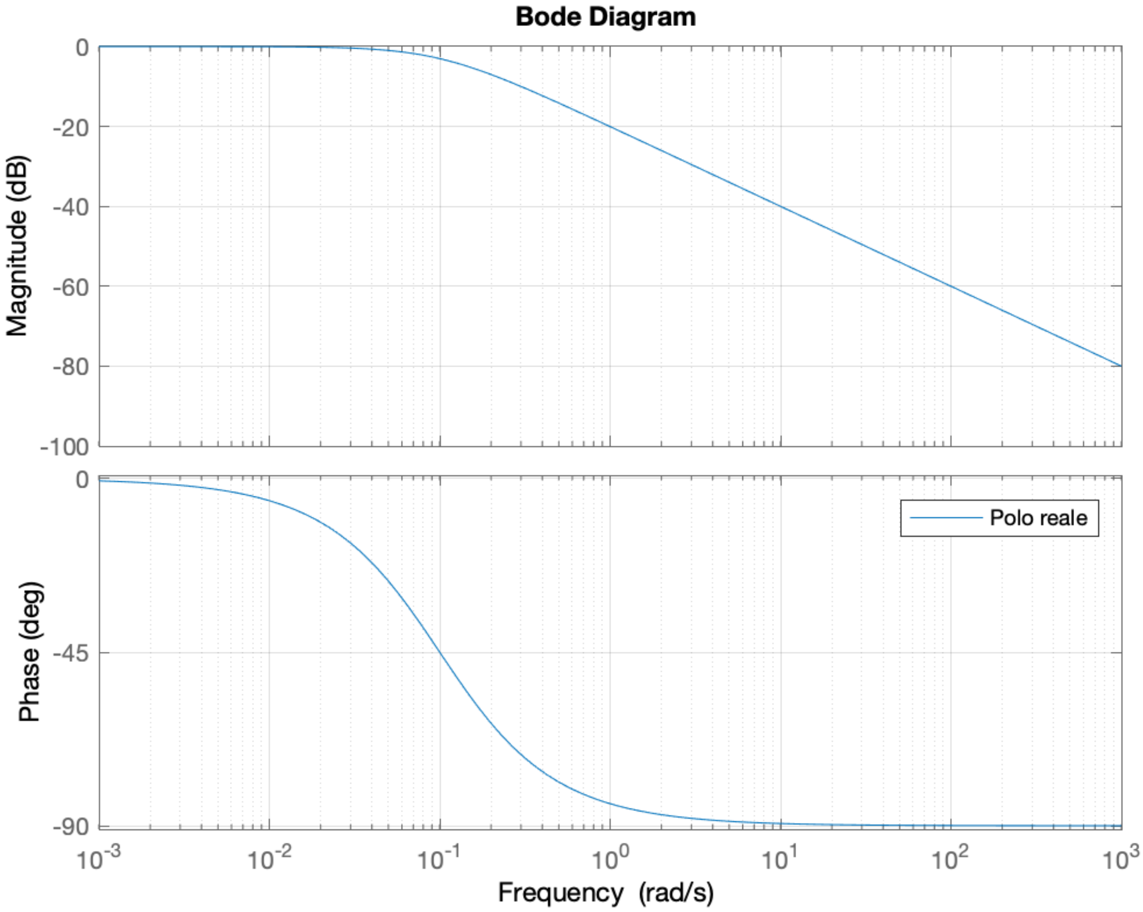
2) Zeri complessi coniugati

$\omega_n^2 = 1$ quindi $\omega_n = 1 = 10^0$
A partire da ω_n si ha:
$|G|_{dB} = +40 dB/dec$
$\angle G = +180$
Punteggio: 1pt



3) $\frac{1}{1+10s}$

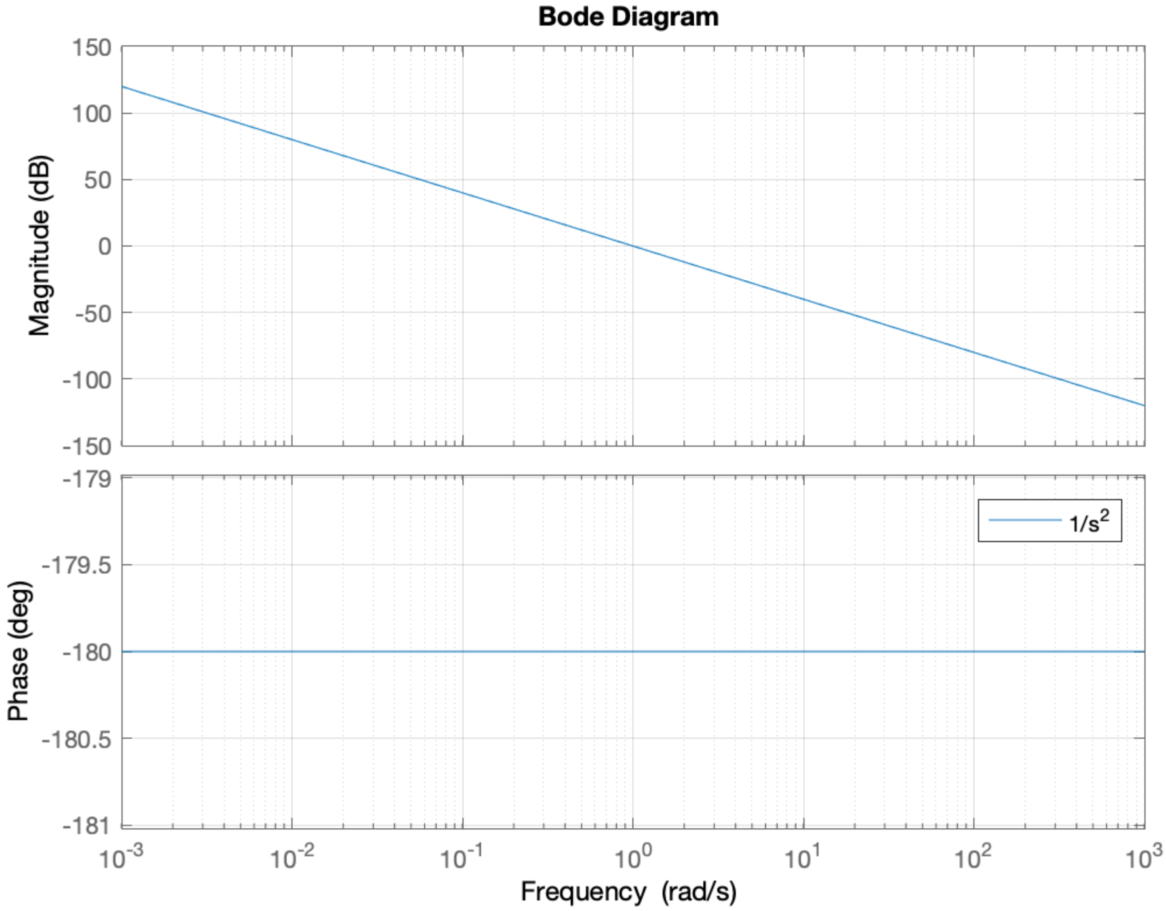
$\tau = 10$ quindi $\omega_n = 0.1$
A partire da ω_n si ha:
$|G|_{dB} = -20dB/dec$
$\angle G = -90$



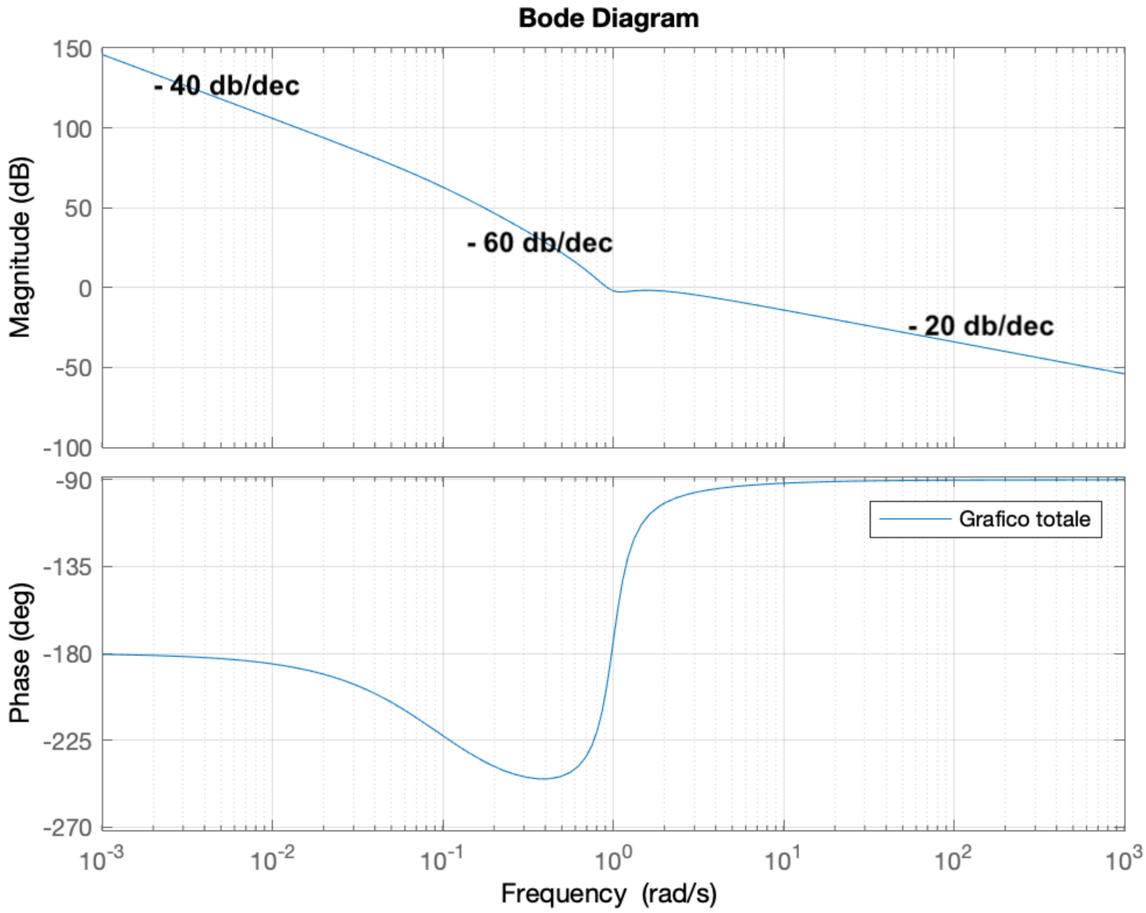
Punteggio: 1pt

4) $\frac{1}{s^2}$

Polo nell'origine con molteplicità $\nu = 2$.
$|G|_{dB} = -20\nu\, dB/dec = -40 dB/dec$
$\angle G = -\nu\, 90 = -180$
Punteggio: 1pt



5) Diagramma globale



Punteggio: 1pt

II) L'espressione generale per poli e zeri complessi coniugati è:

$$1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

Considerando il termine di secondo grado, si può trovare che $\omega_n^2 = 1$ quindi $\omega_n = 1$. Considerando ora il termine di primo grado, si ha

$$2\zeta \, \frac{1}{\omega_n} = 0.4$$

$$2\zeta \, 1 = 0.4$$

$$\zeta = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

Lo smorzamento appartiene al range $0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi:

1. Dato che ci stiamo riferendo ad una coppia di zeri, il digramma reale del modulo sta sotto la sua approssimazione asintotica ed ha un minimo.

2. Per quanto riguarda il diagramma reale della fase, si avrà un lento cambiamento di pendenza in corrispondenza di ω_n nel passare da 0 a 180 gradi.

Punteggio: 1pt

Esercizio 4 7pt

(vedi correzioni precedenti)

Esercizio 5 4pt

$Z[v(k)] = V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}$(considerando che $v(k)$ è nullo per $k < 0$ e per $k \geq N$ e vale 1 altrimenti)

Nell'espressione di $V(z)$ resta una somma finita di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{z}$ e quindi:

$V(z) = \frac{1-(\frac{1}{z})^N}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$

Questa funzione è definita per tutti i numeri complessi $z \neq 0$, quindi la regione di convergenza è $C \setminus \{0\}$